



TITLE:

Part II COMPETITION AND PREDATION : § 4 The growth of mixed populations : Two species competing for a common food supply : § 5 On Volterra's theory of the struggle for existence : § 6 On asymptotically stable periodic solutions in biological differ ...

AUTHOR(S):

齋藤, 保久; 江郷, 直世

CITATION:

齋藤, 保久 ...[et al]. Part II COMPETITION AND PREDATION : § 4 The growth of mixed populations : Two species competing for a common food supply : § 5 On Volterra's theory of the struggle for existence : § 6 On asymptotically stable periodic solutions i ...

ISSUE DATE:

2005-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47685>

RIGHT:

Part II COMPETITION AND PREDATION

§ 4 The growth of mixed populations : Two species competing for a common food supply

§ 5 On Volterra's theory of the struggle for existence

§ 6 On asymptotically stable periodic solutions in biological differential equations

静岡大学工学部 齋藤保久 (Yasuhisa Saito), 江郷直世 (Naoyo Ego)

Faculty of Engineering, Shizuoka University

§ 4 “The growth of mixed populations : Two species competing for a common food supply”
by Alfred J. Lotka

相互依存する多種の個体群変動についての一般的解析は、既に多くなされている。そこで、その特別な場合、ここでは、共通の食物供給で競い合う 2 種の個体群変動についての解析を行う。

共通の食物供給で競い合う 2 種の個体群変動についての解析は、Volterra も行っている。Volterra は、環境に抑制されなければ、個体群成長(population growth)は、個体数に比例して変化するという仮定のもとで議論し始めた。

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (1)$$

これを解くと

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (N(0) = N_0)$$

を得る。つまり、exponential(Malthusian)law に従うことが分かる。

しかし、自然界には、食物供給には限界がある。それを考慮すれば、 r は N に関する減少関数とするのが妥当であり、ここでは減少関数で最もシンプルな一次関数で表すことにする。

$$\frac{dN}{dt} = r_0 N(1 - phN) \quad (2)$$

(2)は、Verhulst-Pearl law と呼ばれ、多くの個体群成長の観測値に一致する。(2)をもとに、Volterra は共通食物供給に対して、2 種が競争を行うモデルとして以下を考えた。

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 [1 - P_1(hN_1 + kN_2)] \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 [1 - P_2(hN_1 + kN_2)] \quad : ph \text{ ある正の定数} \end{aligned} \quad (3)$$

(3)は、(2)の単純な拡張となっている。第一式、第二式にわたり、[]内の N_1 と N_2 の係数が、同じ h , k となっている理由については、後で述べる。

ここでは、この Volterra 独自の設定である(3)に Lotka の先行論文における一般的方法*を適用して Volterra の議論ではみられなかった新しい性質をみる。

(3)において、 $r_1 > 0, r_2 > 0$, $p_1 \neq p_2$ と仮定されている。なぜなら、 $p_1 = p_2$ はめったに起こりえないからである。このとき、内部平衡点は存在しない。したがって、平衡点は次の 3 つとなる。

$$\text{a) } N_1 = 0 \quad N_2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{b) } N_1 = 0 \quad N_2 = \frac{1}{p_2 k} \quad (5)$$

$$\text{c) } N_2 = 0 \quad N_1 = \frac{1}{p_1 h} \quad (6)$$

これらの安定性についてみていこう。

1)a)の平衡点、すなわち、 $(N_1, N_2) = (0, 0)$ 。(3)の原点でのヤコビアン $J(0, 0)$ は、

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

したがって、特性方程式は、

$$\begin{vmatrix} r_1 - \lambda & 0 \\ 0 & r_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

特性根は、

$$\lambda = r_1, r_2 \quad (8)$$

今、 $r_1 > 0, r_2 > 0$ であるので 2 つの特性根とも正となり、不安定。

2)b)の平衡点、すなわち、 $(N_1, N_2) = (0, \frac{1}{p_2 k})$ 。

$$N_1 = N_1 \quad (9)$$

$$n_2 = N_2 - \frac{1}{p_2 k} \quad (10)$$

という変数変換を施して得られた方程式を、線形化、つまり 2 次以上の項を無視して特性根を求めるのだが、要は、以下のヤコビアンを調べてやればよい。

$$J(0, \frac{1}{p_2 k}) = \begin{pmatrix} r_1(1 - \frac{p_1}{p_2}) & 0 \\ -r_2 \frac{h}{k} & -r_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

* cf. Lotka "Elements of physical Biology" 1925

したがって、特性方程式は、

$$\begin{vmatrix} r_1(1 - \frac{p_1}{p_2}) & 0 \\ -r_2 \frac{h}{k} & -r_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

特性根は、

$$\lambda = r_1(1 - \frac{p_1}{p_2}), -r_2 \quad (13)$$

今、 $r_1 > 0, r_2 > 0$ であるので $-r_2$ は負なので、

$$\text{平衡点}(0, \frac{1}{p_2 k}) \text{が安定} \Leftrightarrow p_2 < p_1 \quad (14)$$

3)c)の平衡点、すなわち、 $(N_1, N_2) = (\frac{1}{p_1 h}, 0)$. 2)と同様にして、

$$(\frac{1}{p_1 h}, 0) \text{が安定} \Leftrightarrow p_1 < p_2 \quad (15)$$

14)と(15)より、b)とc)の一方の平衡点が安定ならもう一方は不安定である。ここで、方程式(3)の持つ対称性により、

$$p_2 < p_1 \quad (16)$$

としてもよいだろう。するとこの時2)の議論から、 $(0, \frac{1}{p_2 k})$ が安定。

$p_2 < p_1$ の時、図1のようにになっている。

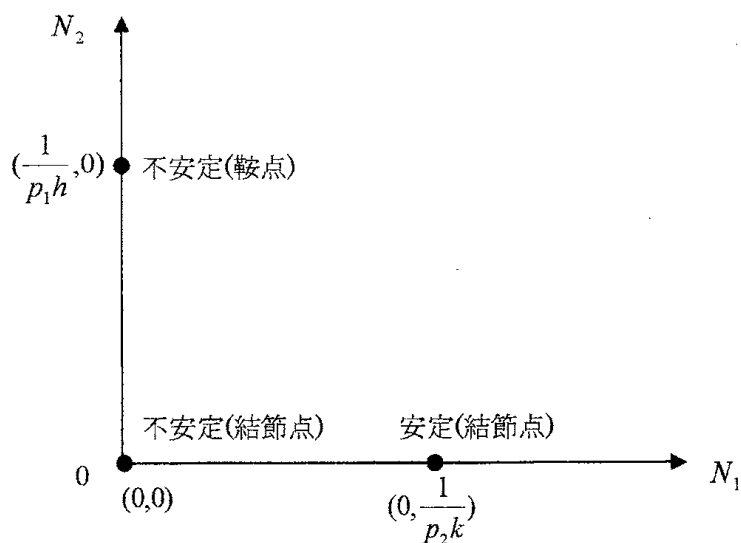


図 1

[等傾線法(isoeline method)]

平面自励系(つまり二次元)

$$\begin{aligned}x' &= P(x, y) \\ y' &= Q(x, y)\end{aligned}\quad (17)$$

と考える $\left(x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}\right)$.

軌道の方程式は, $P(x, y) \neq 0$ ならば,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (18)$$

となる. ベクトル場を描くために, まず, ベクトルの傾斜の等しい点を結ぶ曲線群を描く. すなわち傾斜 S をパラメータとして,

$$\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = S \quad (19)$$

で与えられる曲線群である($S = \infty$ のときは $P(x, y) = 0$ とする). この曲線群の各曲線上の各点において, その曲線に属する傾斜を持った微小線分をできるだけ細密に書き込む. 軌道の一意性が保証されているとき, 任意の点 (x_0, y_0) を通る軌道は, この点から出発して前後に向かってこの微小線分の場合に次々に接していく曲面を描くことによって得られる.

例)

$$\frac{dy}{dx} = y + x \quad (20)$$

等傾線は, 直線

$$y + x = S$$

S が定まらない点, つまり $\frac{0}{0}$ となる点を特異点と呼ぶ(平衡点は特異点).

この方程式には, 特異点は存在しない.

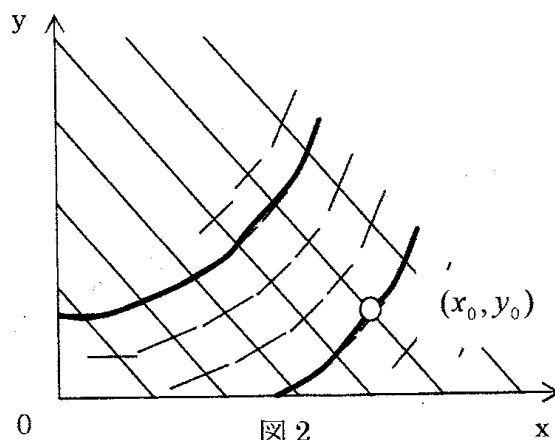


図 2

等傾線法を(3) $r_1 > 0, r_2 > 0, p_2 < p_1$ に適用してみると, 軌道の方程式は以下ようになる.

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{r_1 N_1 [1 - p_1 (hN_1 + kN_2)]}{r_2 N_2 [1 - p_2 (hN_1 + kN_2)]} = S \quad (21)$$

傾斜 S をパラメータとして(21)で与えられる曲線を求めると,

$S=0$ の時は, $r_1 N_1 [1 - p_1 (hN_1 + kN_2)] = 0$, すなわち,

$$N_1 = 0, \quad hN_1 + kN_2 = \frac{1}{p_1} \quad (22)$$

$S=\infty$ の時は, $r_2 N_2 [1 - p_2 (hN_1 + kN_2)] = 0$, すなわち,

$$N_2 = 0, \quad hN_1 + kN_2 = \frac{1}{p_2} \quad (23)$$

(22), (23)は平行であり, 今 $p_2 < p_1$ なので, $\frac{1}{p_2} > \frac{1}{p_1}$ となり, (23)の方が(22)の上にあるこ

とがわかる.

$S \neq 0$ の時, (21)を計算すると,

$$\frac{p_2 k (Sr_2 p_2 h + r_1 p_1 k)^2}{r_1 (Sr_2 h + r_1 k) (p_1 - p_2)} \left[N_2 + \frac{(Sr_2 p_2 h - r_1 p_1 k)}{2Sr_2 p_2 k} N_1 - \frac{1}{2p_2 k} \right]^2 -$$

$$\frac{(Sr_2 p_2 h + r_1 p_1 k)^2}{4S^2 r_2^2 r_1 p_2 k (Sr_2 h + r_1 k) (p_1 - p_2)} \left[N_1 - \frac{Sr_2 (Sr_2 p_2 h - r_1 p_1 k + 2r_1 p_2 k)}{(Sr_2 p_2 h + r_1 p_1 k)^2} \right]^2 = 1 \quad (24)$$

で, 双曲線となる.

ゆえに, 等傾線は, S の値によって図 2 のように描かれるはずである. ここで, 線付近に書かれてある数字が S の値(図 3).

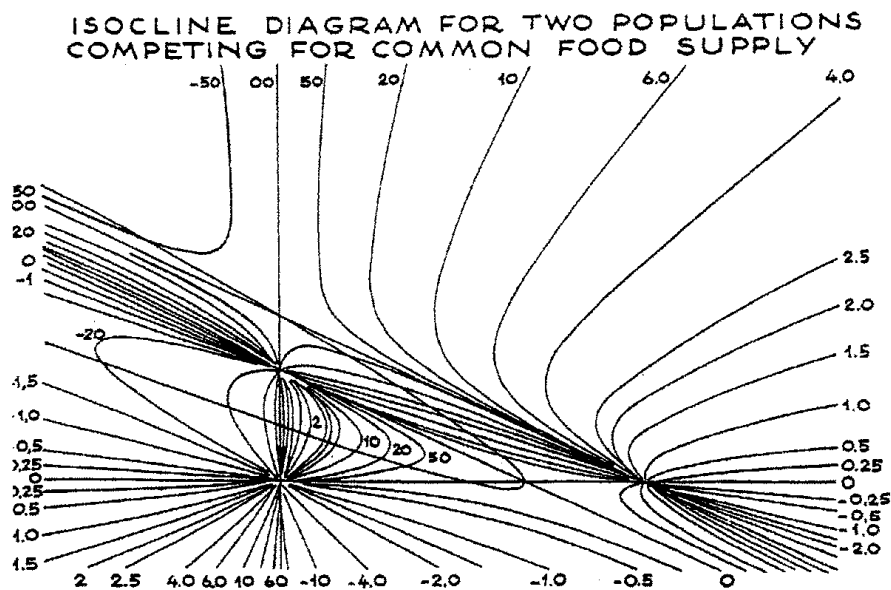


図 3

等傾線法により(3)の積分曲線は図4のようになる.

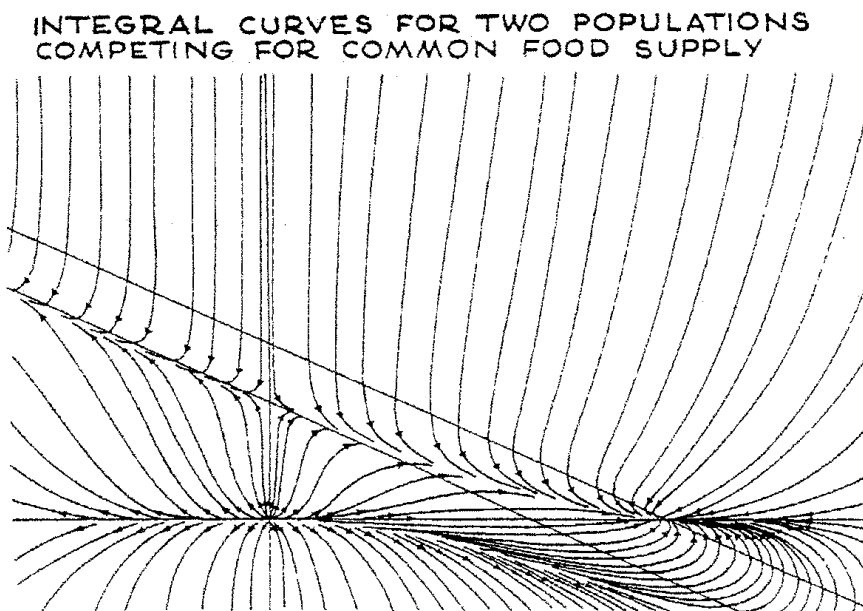


図4

不安定結節点である原点(0, 0)は, 図4において, 積分曲線が原点から離れていることがわかる. また, $(N_1, N_2) = (\frac{1}{p_1 h}, 0)$ は不安定(鞍点), $(N_1, N_2) = (0, \frac{1}{p_2 k})$ は安定結節点であるが, 図を見ても, それらがうかがえる.

双曲線を中心は, (24)の二乗括弧内が共に0になる点, すなわち(25)の交点である:

$$\begin{aligned} N_2 + \frac{(Sr_2 p_2 h - r_1 p_1 k)}{2Sr_2 p_2 k} N_1 - \frac{1}{2p_2 k} &= 0 \\ N_1 - \frac{Sr_2 (Sr_2 p_2 h - r_1 p_1 k + 2r_1 p_2 k)}{(Sr_2 p_2 h + r_1 p_1 k)^2} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$S = \infty$ の時, 交点は,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{r_2 [r_2 p_2 h - \frac{(p_1 - 2p_2)r_1 k}{S}]}{(r_2 p_2 h + \frac{r_1 p_1 k}{S})^2} \rightarrow \frac{1}{p_2 h} \quad (S \rightarrow \infty) \\ N_2 &= \frac{\frac{(2p_1 - p_2)r_2 h r_1}{S} + \frac{(r_1)^2 p_1 k}{S^2}}{(r_2 p_2 h + \frac{r_1 p_1 k}{S})^2} \rightarrow 0 \quad (S \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (26)$$

したがって, $S = \infty$ のとき, 交点は $(N_1, N_2) = (\frac{1}{p_2 h}, 0)$.

$S=0$ の時, 交点は $S=0$ を代入して,

$$N_1 = 0 \quad N_2 = \frac{(r_1)^2 p_1 k}{(r_1 p_1 k)^2} = \frac{1}{p_1 h} \quad (27)$$

したがって, 交点 $(N_1, N_2) = (0, \frac{1}{p_1 h})$.

では, ここで先ほど後回しした(3)における, 第一式, 第二式にわたり N_1 と N_2 の係数の比 $\frac{h}{k}$ が同じになるということだが, この制限の意味合いは, 2 種の N_1, N_2 が同じ単独の食物資源を食しているということになる (2 種が同じ食物を対象にしていれば, 食す割合も同じになるということから, 比も同じということ).

この制限をはずして考えてみると,

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 [1 - P_1(h_1 N_1 + k_1 N_2)] \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 [1 - P_2(h_2 N_1 + k_2 N_2)] \end{aligned} \quad (3)'$$

となり, $h_1 \neq h_2, k_1 \neq k_2$ とすると, (3) ででてきた平衡点 3 つに加えて, 内部平衡点が存在する. 出現する内部平衡点 (N_1^*, N_2^*) は,

$$N_1^* = \frac{p_2 k_2 - p_1 k_1}{p_1 p_2 (h_1 k_2 - h_2 k_1)}, \quad N_2^* = \frac{p_1 k_1 - p_2 k_2}{p_1 p_2 (h_1 k_2 - h_2 k_1)} \quad (28)$$

もし, $N_1^* > 0, N_2^* > 0$ なら, 2 種とも生き残るような平衡点が存在することになる.

先ほどの $h_1 = h_2, k_1 = k_2$ の仮定が「2 種 N_1, N_2 が単独の同じ食物資源を食している」と解釈し得たので, $h_1 \neq h_2, k_1 \neq k_2$ は「2 種の N_1, N_2 が 2 つ以上の食物資源を食している」と解釈できる. この時,

$$N_1^* > 0, N_2^* > 0$$

なる平衡点が出現することが意味するのは, “自然の摂理”から言えば, 複数の食物資源を分け合う多くの種は, 本質的に安定な状態で共存することを示唆しているのではないか.

単独の生物個体群のモデル(2)の Verhulst – Pearl law の解曲線である Verhulst curve は, 多くの個体群成長の場合に適合するが, (3)のような 2 種の生物個体群における成長法則に対する具体的な例は自然界にはもとめられないであろう. 実験室で扱うもので適合するような例が発見できるかもしれないが, 現在のそのような発見は, 待たれている段階である.

しかし, 経済の分野では, すぐに発見されるかもしれない. N_1, N_2 を共通の供給資源と共通の市場を競争している 2 つの企業を考える. この競争に対する問題を取り扱った, 数理経済学者の 1 人, クルノー*は次のように述べている. 「どんな競争者でも, 他の競争者よりほんの少し利益があれば, 最終的には他の競争者たちを退け, ほとんど独占の状態でその市場を占める」と. た

だ、この発言は全て競争者に一様に供給源と市場の利用が許される場合のみ正当化される。なぜなら、実際には一つの地域に競争者が散らばって、各競争者がそこでは他の競争者より利点のあるような縄張りを持っている訳だから。これらのことは、先の $h_1 \neq h_2, k_1 \neq k_2$ の状況のことを言っており、競争者たちは、食物の構成（食物の種類が占める割合みたいなもの）をある程度変化させていかなければならないということを示唆しているということだろう。先の例でいえば、同じ人間層を対象とするわけだが、均等な売り方はせず、地域によって売る割合を変えるということに対応している。

以上、経済学での応用は可能である。その理由を考えた時、経済学的競争は、生物学的競争のもつ一般的な現象の特別な場合だという所に行き着く。

§5 “On Volterra’s theory of the struggle for existence” by A.N.Kolmogoroff

Vito Volterra は、微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2\end{aligned}\tag{I a}$$

によって predator とその prey との相互作用を記述している*⁶。ここで、

N_1 : prey

N_2 : predator

$\varepsilon_1, -\varepsilon_2$: 成長率

γ_1, γ_2 : 相互依存定数

(I a)の右辺は、実際の値への一時近似にすぎず、多くの研究者達によって別の形での記述が提案されてきた。本稿では、特別な設定はせずに一般の、

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= K_1(N_1, N_2) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= K_2(N_1, N_2) N_2\end{aligned}\tag{I}$$

を考える。

* (A. A. Courrot, 1801-1877) 数理経済学の先駆者。

有名な業績の1つに「需要関数の定式化とそれに基づく独占の理学」

$K_1, K_2 \in C^1$ for $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0$ とし (これは解の初期値に関する一意性を保証する),
かつ, K_1, K_2 は以下のような性質をもつものと仮定しよう. K_1, K_2 の性質を述べる前に
次の定義に触れておく.

定義

0 : 原点

$p : (N_1, N_2)$ 平面上の点

$S \xleftrightarrow{\text{def}} \text{ベクトル } \overrightarrow{OP} \text{ の方向}$

$\frac{dK_i}{dS} \xleftrightarrow{\text{def}} S \text{ 方向に沿った } K_i \text{ の微係数 } (i=1,2)$

まず, K_1 について.

(I₁) $\frac{\partial K_1}{\partial N_2} < 0$, すなわち, N_1 を任意に fix したとき, prey N_1 の増殖率 ($K_1(N_1, N_2)$) は,

predator N_2 に関する減少関数. ここで, $\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt}$ は一個体当たりの増加率.

(II₁) $\frac{dK_1}{dS} < 0$, すなわち, 任意に fix した (N_1, N_2) に対して, N_1 の増殖率は S 方向に減少

する. (N_1, N_2) が決まれば, $\frac{N_2}{N_1}$ の比が決まる. これはまさに方向 S が決まることに他なら
ない.

注) $\frac{\partial K_1}{\partial N_1} < 0$ という仮定の方がより自然かと思えるが, 生物学的に十分ではない. 実際, N_2

は非常に大きく, N_1 は非常に小さい時は, えさである N_1 が非常に少ないので, N_2 の個体数は抑えられ, N_1 にとっては良い環境となるから.

(III₁) $K_1(0,0) > 0$. すなわち, N_1 と N_2 が共に十分小さい時は, N_1 は正の増殖率をもつ.

(IV₁) $\exists A > 0$ s.t. $K_1(0, A) = 0$. すなわち, (I₁) の $\frac{\partial K_1}{\partial N_2} < 0$ から $K_1(0, N_2) < 0$ for $N_2 > A$.

(V₁) $\exists B > 0$ s.t. $K_1(B, 0) = 0$.

すなわち, (II₁) $\frac{dK_1}{dS} < 0$ により $K_1(N_1, 0) < 0$ for $N_1 > B$ (ある程度 prey が多いと,

predator がいなくても prey は成長できない).

次に, K_2 について.

(I₂) $\frac{\partial K_2}{\partial N_2} < 0$, すなわち, 任意に fix した N_1 に対し predator N_2 の増殖率は N_2 の減少関数.

(例. えさに対して, 種内で競争が生じるとか)

(II₂) $\frac{dK_2}{dS} < 0$, すなわち, 任意に fix した (N_1, N_2) に対して, S 方向への (N_1, N_2) の増加は predator N_2 にとって好ましい.

(III₂) $\exists C > 0$ s.t. $K_2(C, 0) = 0$.

すなわち, (II₂) の $\frac{dK_2}{dS} < 0$ により $K_2(N_1, 0) < 0$ for $N_1 < C$.

(I_{1,2}) $C < B$ この条件がないと, predator N_2 は必然的に 0 に減衰. (cf. ベクトル場)

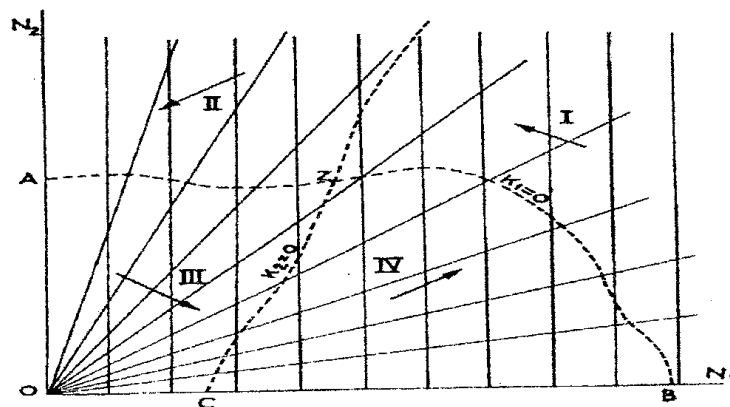


図 1

K_1 , K_2 のみたすべき条件により, $K_1=0$ と $K_2=0$ の交点(これを Z とする)は唯一であることがわかる.

領域 $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ から出発するどんな解も N_1, N_2 の両軸には漸近しない. 積分曲線 L のふるまいの可能性は以下の 3 つとなる (あくまでも「可能性」しか論じていない).

- a) 渦状に点 Z に漸近(Z は focus)
- b) 非渦状に点 Z に漸近(Z は node)
- c) あるリミットサイクルに漸近

case(a)

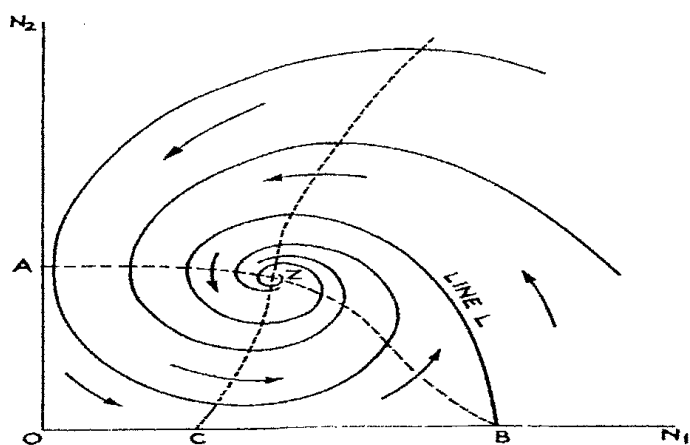


図 2

Lは領域 I から II, III, IVの順に無限回横切るのを繰り返しながらある spiral path に沿って点 Z に漸近. 実際, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ から出発するすべての解は減衰振動しながら点 Z に近づく.

case(b)

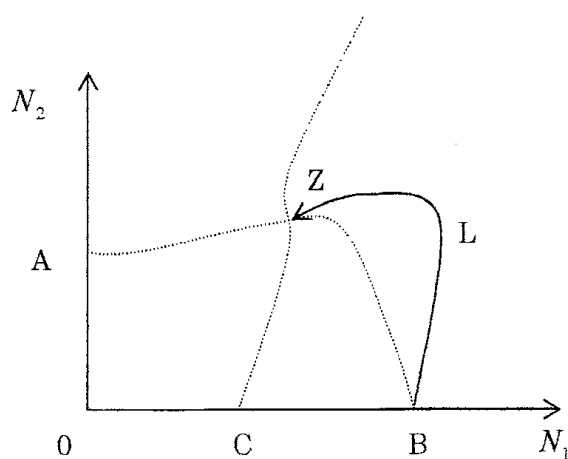


図 3

例えば, Lは領域 I, II, III, IVの順に無限回横切らず, 点 Z に漸近. 実際, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ から出発するすべての解は減衰振動せずに点 Z に近づく.

case(c)

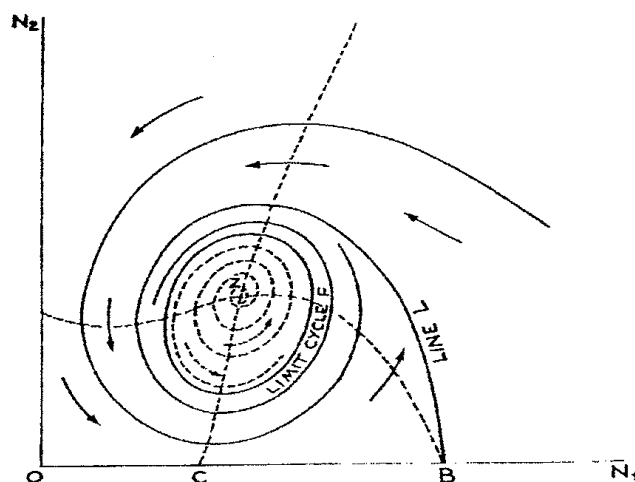


図 4

Lは、領域 I から II, III, IVの順に無限回横切りながら Limit cycle F に漸近する。実際、limit cycle F の外側の $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ から出発する解は F にまきつく。

さらなる仮定を設けなければ limit cycle F の内側で何が起こるかは決定できない。一般には同心の任意の数の安定もしくは不安定な cycle が存在しえる。Z は、

- a center
- a stable or unstable node
- a stable or unstable focus

のいずれかになり得る。

case(c)の中で最もシンプルな、しかも practical interest な(cf.(3))のケースが次。
case(c₁)Limit cycle F が唯一つでしかも simple. 内側からも外側からも漸近。この時 Z は an unstable focus か an unstable node.

Volterra の考えた、

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2\end{aligned}\tag{1a}$$

は全ての解が周期解。

(I)の特別な場合として、

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \delta N_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2\end{aligned}\tag{a}$$

(case(a)に対応)や、

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \frac{\delta}{K} N_1 - \frac{\gamma_1 N_2}{1 + \delta N_1}) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= (-\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2 N_2}{1 + \delta N_1}) N_2\end{aligned}\quad (c)$$

(case(c)に対応). なぜなら,
例)

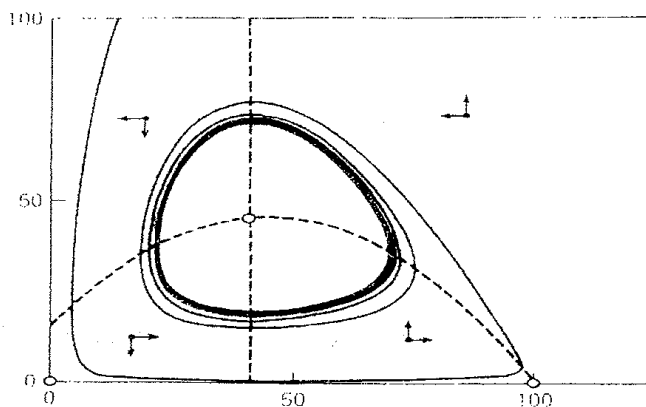


図 5

$$(c) \varepsilon_1 = 0.03, \delta = 0.1, K = \frac{1000}{3}, \gamma_1 = 0.002, \varepsilon_2 = 0.1, \gamma_2 = 0.0124$$

$N_1 > 0, N_2 > 0$ のどの点から出発しても一定周期で一定の振幅を持つ振動をするようになる。つまり、 $\delta \rightarrow 0$ として (I a) を拡張し、(c) を得る。(I a) は case(a) と (c) の極限ケース。

§ 6 “On asymptotically stable periodic solutions in biological differential equations” by V.A. Kostitzin

直前の Kolmogoroff の論文では、

$$\begin{aligned}x' &= \phi(x, y) \\ y' &= \psi(x, y)\end{aligned}\quad (1)$$

のタイプの方程式に漸近周期解が存在しうることに触れたが、そのような可能性は Lotka の論文 “Elements of physical biology” において既に指摘されている。また、それは H. Poincare と E. Picard によると研究からもうかがえる。本稿では、比較的シンプルな場合でそのような可能性があることを示す。

$$\begin{aligned}x' &= \alpha x - \lambda y - x(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2) \\ y' &= \varepsilon y - \lambda y - y(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)\end{aligned}\quad (2)$$

を考えよう。極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を施すと,

$$\begin{aligned}\frac{r'}{r} &= \varepsilon - r^2 \left[\alpha^2 \cos^2 2\theta + \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) \sin^2 2\theta \right] \\ \theta' &= \lambda - \frac{r^2}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \sin 2\theta \cos 2\theta\end{aligned}\quad (3)$$

を得る。 $\varepsilon > 0$ としよう。 $\alpha^2 = \beta^2$ の時(3)は,

$$\begin{aligned}\frac{r'}{r} &= \varepsilon - \alpha^2 r^2 \\ \theta' &= \lambda\end{aligned}$$

明らかに半径 $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha}$ の漸近周期解が存在する。

次に, $\alpha^2 \neq \beta^2$ とすると, (3)より $r' = 0$ の時は,

$$r^2 = \frac{\varepsilon}{\alpha^2 \cos^2 2\theta + \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) \sin^2 2\theta} \quad (4)$$

したがって, (4)は閉軌道。振幅は $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2)}}$ と $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha^2}}$ の間を変化。さらに,

$$r^2 < \frac{\varepsilon}{\alpha^2 \cos^2 2\theta + \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) \sin^2 2\theta} \quad (\text{閉軌道の内側}) \quad \text{においては, } r' > 0.$$

θ' は(3)より, $\theta' = 0$ の時は,

$$r^2 = \frac{2\lambda}{(\beta^2 - \alpha^2) \sin 2\theta \cos 2\theta} \quad (5)$$

$\frac{2\lambda}{\beta^2 - \alpha^2} > 0$ としておこう。 ($\frac{2\lambda}{\beta^2 - \alpha^2} < 0$ のときも同様)。 $r' > 0$ かつ $\theta' > 0$ を満たすには,

$$r^2 < \frac{\varepsilon}{\alpha^2 \cos^2 2\theta + \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) \sin^2 2\theta}$$

と

$$r^2 < \frac{2\lambda}{(\beta^2 - \alpha^2) \sin 2\theta \cos 2\theta}$$

が同時に満たされればよい。すなわち,

$$\frac{2\lambda}{(\beta^2 - \alpha^2) \sin 2\theta \cos 2\theta} \geq \frac{\varepsilon}{\alpha^2 \cos^2 2\theta + \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) \sin^2 2\theta} \quad (*)$$

が成立すればよい。

$$(*) \Leftrightarrow \alpha^2 \left(\cos 2\theta - \frac{\varepsilon(\beta^2 - \alpha^2)}{4\lambda\alpha^2} \sin 2\theta \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon^2(\beta^2 - \alpha^2)^2}{16\lambda^2\alpha^2} - \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \right) \sin^2 2\theta \geq 0$$

したがって, $\frac{\varepsilon^2(\beta^2 - \alpha^2)^2}{16\lambda^2\alpha^2} < 0$ であればよい.

$$8\lambda^2\alpha^2(\beta^2 + \alpha^2) > \varepsilon^2(\beta^2 - \alpha^2)^2 \quad (6)$$

条件(6)の下では, 閉曲線(4)の内側から出発する解は, $r' > 0$ かつ $\theta' > 0$ により, 反時計まわりで外側に広がっていく. 反対に, (4)の外側から出発する解は, $r' < 0$ なので, 内側に向かう. つまり, (2)の全ての解は, ある closed limit cycle に漸近する.

$\theta' \neq 0$ は ...

(3) \neq

$$\theta' = 0 \text{ ときは } r^2 = \frac{2\lambda}{(\beta^2 - \alpha^2) \sin 2\theta \cos 2\theta} \quad (5)$$

$$\frac{2\lambda}{\beta^2 - \alpha^2} > 0 \text{ と } \left(\frac{2\lambda}{\beta^2 - \alpha^2} < 0 \text{ ときは } \theta' < 0 \right)$$

